20/3/2017

· Διαφορίσιμη καμπύλη κατά τμήματα.

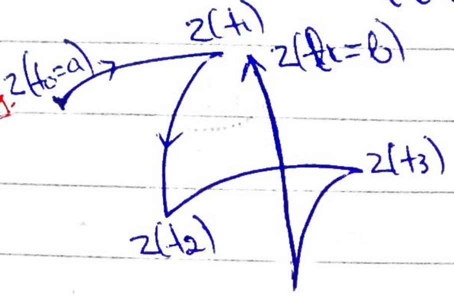
$\gamma: z = z(t),\ t \in [a,b]$.

$\exists\ a = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = b$

$\forall\ t \in (t_j, t_{j+1}),\ \exists z'(t)$ & ΣΥΝΕΧΗΣ (οι εφ. ευθείες μεταβαίνουν ομαλά από σημείο σε σημείο)

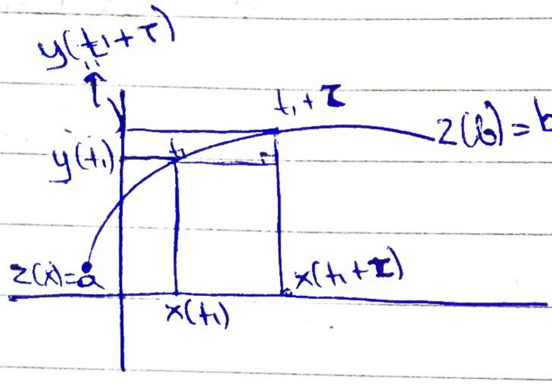
& $\forall j\ \exists \lim\limits_{t \downarrow t_j} z'(t)$ & $\exists \lim\limits_{t \uparrow t_{j+1}} z'(t)$.

Π.χ.



έχω γωνίες.

Π.χ.



$$\Delta z(t_1) = z(t_1+\tau) - z(t_1)$$
$$= \sqrt{[x(t_1+\tau) - x(t_1)]^2 + [y(t_1+\tau) - y(t_1)]^2}$$
$$= \sqrt{(x'(\xi_1))^2\tau^2 + (y'(\xi_2))^2\tau^2} =$$
$$= \sqrt{x'(\xi_1)^2 + y'(\xi_2)^2}\cdot\tau, \quad \xi_i \in [t_1, t_1+\tau]$$

$$|z'(t_1)|dt \simeq \sqrt{x'(\xi_1)^2 + y'(\xi_2)^2}$$

$$|dz| = |z'(t)|dt.$$

(Αν έχω μία φ τότε $d\varphi = \varphi'(t)dt$. είναι μία γραμμική απεικόνιση (σε όλο το R))

$$\mu(\gamma) = \int_a^b |dz| = \int_a^b |z'(t)|\,dt.$$ Υπάρχει, αφού η καμπύλη μου είναι διαφορ. (συνεχής καμπύλη)

$\gamma \neq t$.

Αφού το μήκος είναι ανεξάρτητο από τον τρόπο που διαγρ. την καμπ.

*Ν.δ.ο. το μήκος είναι ανεξάρτητο από τον τρόπο που διαγράφαμε την καμπύλη.

$z=z(t),\ t\in[a,b]$

$t=t(s),\ s\in[a',b']$

$z^*=z^*(s)=z(t(s)),\ s\in[a',b']$.

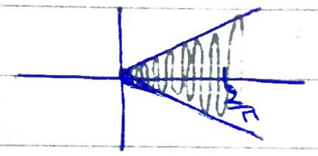
$$\int_{a'}^{b'}|z^{*'}(s)|\,ds=\int_{a'}^{b'}|z'(t(s))|\,t'(s)\,ds.$$

$$\int_{a}^{b}|z'(t)|\,dt=\mu(\gamma).$$

Το μήκος παραμένει αναλλοίωτο.

⊛ $\phi(x)=x\eta\mu\frac{1}{x}$ (στο $\mathbb{R}$)

(στο $\mathbb{C}$): $z(t)=t+it\eta\mu\frac{1}{t},\ t\in[0,\frac{2}{\pi}]$

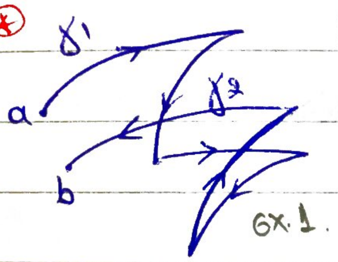


Είναι ανόρθωτη, δεν είναι κατά τμ. διαφορ.

$$\mu(\gamma)=\int_0^{\frac{2}{\pi}}\sqrt{1+\left[\eta\mu\frac{1}{t}+t\sigma\upsilon\nu\frac{1}{t}\left(-\frac{1}{t^2}\right)\right]^2}\,dt$$

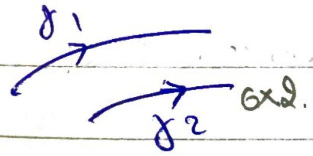
$$=\int_0^{\frac{2}{\pi}}\sqrt{1+\left(\eta\mu\frac{1}{t}-\frac{1}{t}\sigma\upsilon\nu\frac{1}{t}\right)^2}\,dt=+\infty$$ (λόγω του 0 κοντά και)

⊛



(Το τελικό της πρώτης είναι το αρχικό της 2ης)

Αλυσίδα καμπυλών: $C=\{\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_k\}=\sum_{j=1}^{k}\gamma_j$.



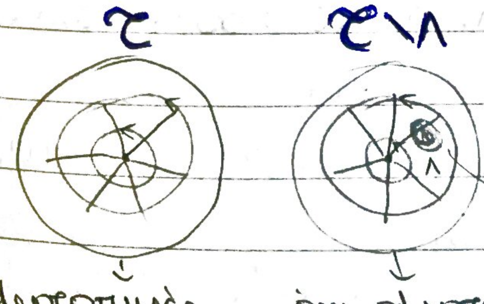
* Είναι σύνολο και δεν είναι απαραίτητο να ισχύει η ιδιότητα του σχ.1.
* Μπορεί να περιέχει και απλά σημεία.

* $\gamma-\gamma=\{\gamma,-\gamma\}=0$ (a b) *

* Μπορώ να πάρω την αντίθετη φορά & να έχω $-C$.

$\mathcal{T}$ $\qquad$ $\mathcal{T}\setminus\Lambda$

⊛



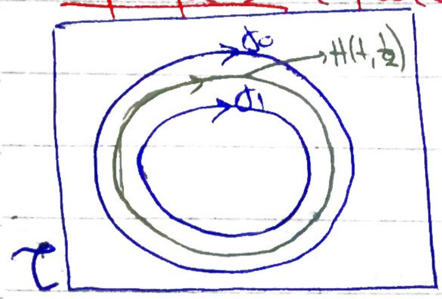
Θέλω να φέρω τη μικρή καμπύλη να "πατήσει" στη μεγάλη.

→ Δεν μπορεί να περάσει από εκεί. ($\Lambda\notin\mathcal{T}$).

ομοτοπικές $\qquad$ όχι ομοτοπικές

Ομοτοπικές καμπύλες: Είναι κλειστές και απλές και η μία μπορεί να "πατήσει" πάνω στην άλλη χωρίς να "σηκωθεί" από τον τόπο. (να βρίσκεται συνεχώς μέσα στον τόπο και να έχει τις ιδιότητες που είχε στην αρχή - απλή και κλειστή).

Ορισμός (Ομοτοπικές καμπύλες).



$$\begin{cases} z = z_0(t), & t\in[a,b] \\ z = z_1(t), & t\in[a,b] \end{cases}$$

Μπορώ να κάνω αναπαραμ. και να έχω το $[a,b]$, δε σημαίνει ότι ήταν έτσι.

(η γ_0 → μεταμ. και πάει στη γ_1)

$s=0$

$s=1$.

$H(t,s)$, $t\in[a,b]$, $s\in[0,1]$.

1) $H(t,0)=z_0(t)$

2) $H(t,1)=z_1(t)$. $H(t,\frac{1}{2})$: η καμπύλη στη μισή ώρα.

3) $\forall s$, $H(t,s)$, $t\in[a,b]$: απλή και κλειστή.

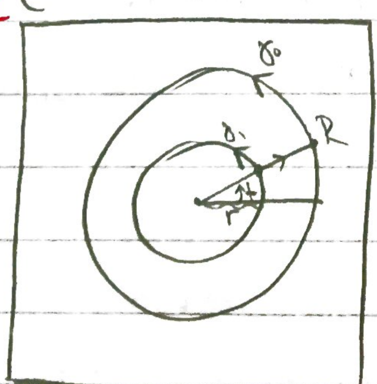
Οι $\begin{cases} z = z_0(t), & t\in[a,b] \\ z = z_1(t), & t\in[a,b] \end{cases}$, είναι **ομοτοπικές** όταν:

$\exists$ $H(t,s): [a,b]\times[0,1] \to \tau$. με

$\tau \ni H(t,s)$, $t\in[a,b]$, $s\in[0,1]$. και ισχύουν τα 1,2,3 και επιπλέον είναι 4) συνεχής.

— Ομόκεντροι κύκλοι —

π.χ.1 τ



γ_0: $z = z_0(t) = R(\sigma\upsilon\nu(t) + i\eta\mu(t))$, $t\in[0,2\pi]$

γ_1: $z = z_1(t) = r(\sigma\upsilon\nu(t) + i\eta\mu(t))$,

θέλω ίδιο πεδίο ορισμού.

$z_1(t)$ $\quad$ $z_0(t)$

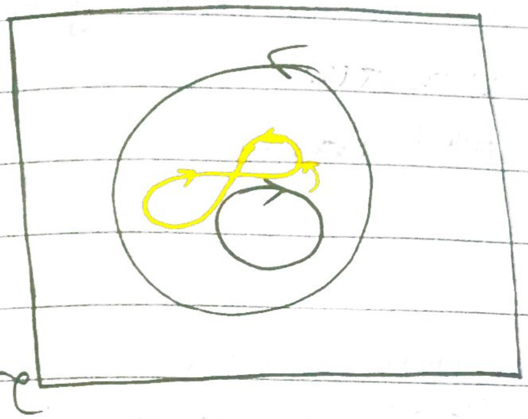
Αναπαραμ.: $(1-s)z_1(t) + s z_0(t)$, $s\in[0,1]$

$H(t,s)$: ↑

Άρα, $H(t,s) = [(1-s)r + sR](\sigma\upsilon\nu(t) + i\eta\mu(t))$, $(t,s)\in[0,2\pi]\times[0,1]$.

(μετακινώ ακτινωτά τα σημεία από γ_1 σε γ_0).

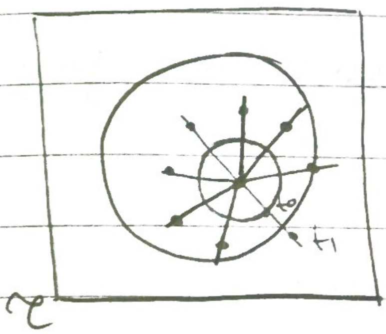
π.χ.2 — αντίθετη φορά —



Δεν μπορεί να γίνει αν έχουν διαφορετική φορά, αφού κάποια στιγμή θα πρέπει να αντιστραφεί (ζ) και δεν θα έχει τις αρχικές της ιδιότητες (απλή – κλειστή)

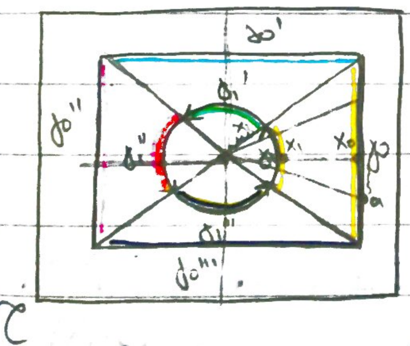
π.χ.3 — όχι ομόκεντροι —

(με τον προηγούμενο τρόπο)



Δεν γίνεται, γιατί "η ταχύτητα διατηρείται δηλ. κάθε σημείο διαγράφει ίση απόσταση σε ίσο χρόνο.

π.χ.4



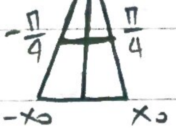
Απεικονίζω τις $\gamma_1, \gamma_1', \gamma_1'', \gamma_1'''$ στις $\gamma_0, \gamma_0', \gamma_0'', \gamma_0'''$ αντίστ.

$\gamma_1 \to \gamma_0$ $\quad x_0\, \varepsilon\varphi(t),\ t \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ (*)

$\gamma_0 : z = z_0(t) = x_0 + it,\ t \in [-x_0, x_0]$

$\gamma_1 : z = z_1(t) = x_1(\sigma\upsilon\nu(t) + i\, \eta\mu(t)),\ t \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$.

(*) Η ίδια γωνία μπορεί να εκφράζει σημεία του κύκλου και σημεία του τετραγ. (βοηθάει το σχήμα) αλλιώς κάνουμε τη γνωστή διαδικασία: απεικονίζω τη μία στην άλλη



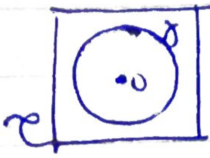
Άρα $H(t,s) = (1-s)\, z_1(t) + s\, z_0(t) =$

$$= (1-s)x_1(\sigma\upsilon\nu(t) + i\,\eta\mu(t)) + s\, x_0\, \varepsilon\varphi(t),\ t \in [-\tfrac{\pi}{4}, \tfrac{\pi}{4}],\ s \in [0,1].$$

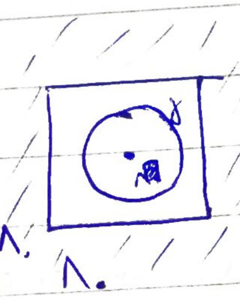
(Το ίδιο κάνω για κάθε γ_i)

(μηδέν ομοτοπική)

Ορισμός: Μία καμπύλη λέγεται **μηδέν ομοτοπική**, αν η καμπύλη είναι ομοτοπική ως προς το Ο. ($\gamma \sim$ (χωρίς να βγεί από τον τόπο)



Παρατήρηση: Αν είχαμε



η γ δεν θα ήταν μηδέν ομοτοπική αφού θα εμπόδιζε το Λ.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

* Κάθε καμπύλη είναι ομοτοπική με τον εαυτό της. $\gamma \sim \gamma$
* $\gamma_0 \sim \gamma_1 \iff \gamma_1 \sim \gamma_0$.

Αποδ. $H(t,s)$, $t \in [a,b]$, $s \in [0,1]$:
$H(t,0) = \gamma_0$, $H(t,1) = \gamma_1$.
Ορίζω $H^*(t,s) = H^*(t,1-s)$.
άρα $H^*(t,0) = \gamma_1$ και $H^*(t,1) = H(t,0) = \gamma_0$.

* $\gamma_0 \sim \gamma_1$ και $\gamma_1 \sim \gamma_2 \Rightarrow \gamma_0 \sim \gamma_2$. ■

Συναρτήσεις

* Έστω $f : \Delta \to \mathbb{C}$. $\Delta \subseteq \mathbb{C}$.

- **1η Περίπτωση:** $\Delta \subseteq \mathbb{R}$, $\forall t \in \Delta$, $f(t) \in \mathbb{C}$: $f(t) = u(t) + iv(t)$.

$\left(\begin{cases} x = u(t) \\ y = v(t) \end{cases}, t \in \Delta :$ καμπύλη $(x,y) \right) = (u(t), v(t))$.

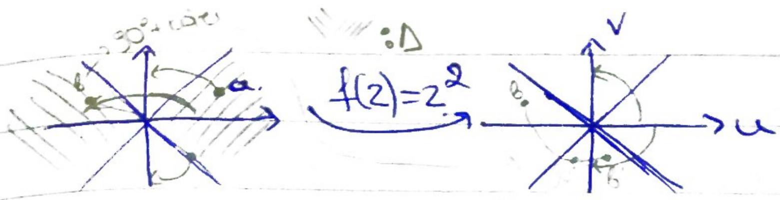
- **2η Περίπτωση:** $R(f) \subseteq \mathbb{R}$: $\forall z \in \Delta$: $f(z) = t \in \mathbb{R}$.

$$f(x,y) = f(x+iy) = t$$

άρα έχω την $t = f(x,y)$. (συνάρτηση τριών μεταβλητών)

$t = f(x,y)$: $(x,y) \in \{(x,y) \subseteq \mathbb{R}^2 : x + iy \in \Delta\}$ Επιφάνεια

Π.χ. $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |Re(z)| \geq |Im(z)|\}$. $z = x + iy$
$f(z) = z^2$. άρα $|x| \geq |y|$



$K=\{w : Re(w)\geq 0\}$

(Το α θα έχει διπλάσιο όρισμα και μεγαλύτερο μέτρο αφού $f(z)=z^2$)

$z\in\Delta:\ z=x+iy\ ,\ |x|\geq|y|$

$f(z)=z^2=x^2-y^2+2ixy=w=u+iv.$

όπου $u=x^2-y^2$ και $v=2xy$.

$|x|\geq|y| \Rightarrow x^2\geq y^2 \Rightarrow u\geq 0.$

$f(\Delta)\subseteq K.$

Είναι $f(\Delta)=K$?

$w\in K,\quad w=u+iv,\ u\geq 0.$

$$\begin{cases} u=x^2-y^2 \\ v=2xy \end{cases} \Rightarrow u^2+v^2=x^4+2x^2y^2+y^4=(x^2+y^2)^2.$$

$|w|^2=(x^2+y^2)^2 \Rightarrow |w|=x^2+y^2$

$u+|w|=2x^2$

$x=\pm\sqrt{\dfrac{u+|w|}{2}}\ ,\ y=\pm\sqrt{\dfrac{-u+|w|}{2}}$

$z=x+iy=\pm\sqrt{\dfrac{u+|w|}{2}}\pm i\sqrt{\dfrac{-u+|w|}{2}}\in\Delta.$

Άρα $f(\Delta)=K$.

Ιδιότητες   Έστω $f,g:\Delta\to\mathbb{C}$

* Άθροισμα συναρτήσεων: $(f+g)(z),\ z\in\Delta,\ f+g$
* Πολ/μός — " — $\bullet (af)(z)\ ,\ a\cdot f$

  $\bullet (fg)(z)=f(z)\cdot g(z)\ ,\ f\cdot g$

Όριο Συνάρτησης (Μιγαδικών Συναρτήσεων).

$\mathcal{D}\subseteq\mathbb{C},\ f:\mathcal{D}\to\mathbb{C},\ z_0\in\mathcal{D},\ \ell\in\mathbb{C}.$

$\lim\limits_{z_0} f=\ell.\ :(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0):(\forall z\in\mathcal{D}): 0<|z-z_0|<\delta \Rightarrow |f(z)-\ell|<\varepsilon.$

$f\xrightarrow[z\to z_0]{}\ell \qquad z\in B_0(z_0,\delta)\Rightarrow f(z)\in B(\ell,\varepsilon).$

Έστω $\delta = \frac{1}{\nu}$ εφαρμόζω τον προηγούμενο ορισμό.

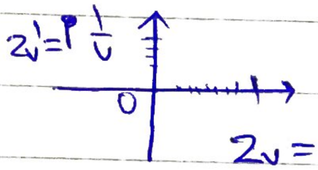
$\exists \lim\limits_{z_0} f = l$: $\forall z_\nu \to z_0$ & $z_\nu \neq z_0$ $\exists \lim\limits_{z_0} f$ και $f(z_\nu) \to l$

$\nexists \lim\limits_{z_0}$: $\exists z_\nu \to z_0$ & $z_\nu \neq z_0$, όμως ή $\nexists \lim\limits_{z_0} f$ ή $f(z_\nu) \not\to l$.

=

δηλ. $\exists z_\nu$ και z_ν' τ.ω. $f(z_\nu) \to a$, $f(z_\nu') \to b$ και $a \neq b$.

πχ. $f(z) = \frac{\bar{z}}{z}$, $z \neq 0$.



$z_\nu = \frac{1}{\nu} \to 0$, $f(z_\nu) = \frac{\overline{\frac{1}{\nu}}}{\frac{1}{\nu}} = 1$

$\neq$ άρα $\nexists \lim f(z)$

$z_\nu' = \frac{1}{\nu} i \to 0$, $f(z_\nu') = \frac{\overline{i\frac{1}{\nu}}}{i\frac{1}{\nu}} = -1$

παρατήρηση: Αν $f(z_\nu) = 1$ και $f(z_\nu') = 1$, δε σημαίνει πως και $\lim f(z) =$

πχ. • $f(z) = \left(\frac{\bar{z}}{z}\right)^2$, • $z = t \in \mathbb{R}$, $f(z) = 1$.

• $z = it \in Im$, $f(z) = \left(\frac{-it}{it}\right)^2 = 1$

• $z = (1+i)t$, $z_\nu = (1+t)\frac{1}{\nu}$, $f(z_\nu) = \frac{(1-i)^2 \frac{1}{\nu^2}}{(1+i)^2 \frac{1}{\nu^2}} = \frac{-2i}{2i} = -1$

Ορισμοί:

$\lim\limits_{z_0} f = l$: $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)$ $z \in \mathcal{Z} \cap B_0(z_0, \delta) \Rightarrow f(z) \in B(l, \varepsilon)$.

αν $\mathbb{C} \to \overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ (για z_0 και l πεπερασμένα ή άπειρα).

1) $z_0, l \in \mathbb{C}$ 2) $z_0 = \infty$, $l \in \mathbb{C}$ 3) $z_0 = \infty$, $l = \infty$ 4) $z_0 \in \mathbb{C}$, $l = \infty$

• Για (2): $(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)(\forall z\in \mathbb{C}),\ |z|>\frac{1}{\delta} \Rightarrow f(z)\in B(\ell,\varepsilon).$

• Για (3): ———— " ———— " ———— $f(z)>\frac{1}{\varepsilon}$

• Για (4): ———— " ————, $z\in B_0(z_0,\delta) \Rightarrow |f(z)|>\frac{1}{\varepsilon}.$